

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LES RÉFÉRENCES MATHÉMATIQUES DANS L'ŒUVRE DE ZELIG HARRIS

Language bears, on the face of it,
the promise of mathematical treatment.

Z. HARRIS

Que le langage, de par sa nature même, demande qu'on l'étudie en s'aidant des mathématiques, cette idée — en tant qu'idée directrice — apparaît très tôt dans l'œuvre de Zellig Harris. Dès 1946, dans « From morpheme to utterance », il formalise les « expansions » en introduisant un système hiérarchisé d'équations entre catégories linguistiques et il esquisse la formulation d'une grammaire en termes d'homomorphismes partiellement ordonnés. Telle façon de voir n'était pas si courante à l'époque...

L'idée directrice ne devait pas cesser de s'affermir par la suite. Rappelons que l'adjectif *mathematical* figure dans les titres mêmes de deux ouvrages majeurs du Maître : les *Mathematical structures of language* et l'*English grammar on mathematical principles*. Quant à l'aphorisme cité en épigraphe, c'est l'incipit d'un essai récent que l'on trouvera dans les *Mélanges Schützenberger*, essai qui s'intitule précisément *On the mathematics of language*.

Voilà donc près de cinquante ans que Zellig Harris, pour réaliser le programme qu'il s'était très tôt fixé, cherche et trouve dans les mathématiques certains de ses *appuis*. Le fait mérite l'examen le plus attentif et sans doute convient-il de le considérer sans l'enfermer dans le cadre réducteur des « Applications possibles des mathématiques à la linguistique ». La question ne serait-elle pas plutôt : *comment un peu de mathématique peut-il se transmuier en linguistique ?*

*
* * *

Les mathématiques — on prend ici le terme au sens large, c'est-à-dire logique comprise — les mathématiques dont Harris a nourri sa pensée sont celles de son temps, tout simplement : pas de quête d'un grand ancêtre.

Depuis le début du XX^e siècle, les logiciens s'efforçaient de donner des fondations solides à l'édifice mathématique que venait d'ébranler la découverte de plusieurs paradoxes. Or — hasard ou nécessité ? — à l'époque où Harris a pris

en charge l'entreprise « homologue » d'asseoir la linguistique sur des bases nettes, le problème dit du *fondement des mathématiques* restait plus que jamais d'actualité. L'idée pouvait donc tenter de transférer d'un champ à l'autre, non certes les méthodes mises en œuvre, mais leur esprit et, au premier chef, l'esprit du *finitisme* et du *constructivisme*. Qu'est-ce à dire ?

En vue d'étudier la mathématique formelle, Hilbert avait préconisé de prendre comme instrument métamathématique une arithmétique *finitiste* (en anglais : *finitary*). Dans une telle arithmétique, on ne considère jamais qu'un nombre défini d'objets et de fonctions pensables et manipulables de façon immédiate et concrète. Les restrictions sévères que s'impose le finitisme (ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans le détail technique) en faisait un instrument trop faible pour atteindre les buts visés, aussi a-t-on adopté par la suite le point de vue un peu plus large du *constructivisme* (dont le finitisme apparaît comme un cas particulier).

Afin de ne progresser qu'en terrain sûr, les mathématiques constructives ne considèrent que des êtres construits au moyen de règles explicitement énoncées et telles que l'existence des êtres en question puisse être tenue pour intuitivement assurée. Intuitivement... nous y voilà ! *L'intuitionnisme* de L. E. J. Brouwer (développé également par A. Heyting) occupe parmi les diverses écoles constructivistes une place importante mais un peu à part car il refuse de définir *a priori* la constructivité, s'en tenant à une certaine référence à l'intuition. Seul un philosophe serait en mesure d'examiner, tant paraît obscure chez Brouwer cette référence (kantienne ?) à l'intuition, si la pensée de Harris doit quelque chose à cette face-là de la doctrine brouwerienne. En revanche, il semble bien que Harris ait fait sienne la règle d'or de l'intuitionnisme : le rejet de l'utilisation irréféchie du *tertium non datur* et sa limitation aux systèmes finis.

Une autre direction de recherche, à laquelle il convient d'accorder une mention spéciale, est celle qu'ouvre la Théorie des types de B. Russel. L'auteur en avait donné une première version dès 1903 dans les *Principles of Mathematics*. Une deuxième version, très remaniée, devait paraître en 1910 dans les *Principia mathematica* écrits en collaboration avec A. N. Whitehead. Cette théorie passe à juste raison pour difficile à lire, de nombreux commentateurs en ont dénoncé les défauts et les obscurités. Quoi qu'il en soit de leur mise en œuvre, les idées sur lesquelles se fondent la théorie sont solides et de bon aloi. Elles visent à prévenir les paradoxes qui apparaissent lorsque l'on se permet d'appliquer « n'importe quoi à n'importe quoi ». Elles posent des règles. C'est ainsi par exemple qu'une fonction requiert nécessairement des arguments d'un certain type. En d'autres termes, les arguments pour lesquels une fonction prend des valeurs — son domaine de signification — appellent une caractérisation par un type. Un type est une catégorie logique. Et comme les valeurs de telle fonction peuvent servir d'arguments pour telle autre, on conçoit que doive exister une hiérarchie de types, et que celle-ci ne soit pas « verticale » mais « ramifiée » (d'où un ordre). Une théorie des types, pour être efficace, doit donc fournir un procédé effectif

pour le calcul des types (et c'est en ce qui concerne les détails de ce calcul que la construction de Russel n'apparaît pas toujours satisfaisante ¹).

C'est dans l'emploi de la notion de métalangue qu'il paraît *a priori* le plus difficile d'opérer un rapprochement fructueux entre les deux « problèmes de fondement ». En fait, Harris a su tirer parti des oppositions mêmes. Les logiciens de l'école polonaise (Lucasiewicz, Tarski) avaient élaboré, indépendamment de Gödel et parfois avant lui, une échelle infinie superposant langue (de la mathématique) et métalangues, où chaque degré contenait la syntaxe du degré immédiatement inférieur. Comment éviter d'être happé par un tel engrenage ? Sur quel terrain se placer ?

Inversement (si l'on peut dire), Gödel, prenant pour langue l'arithmétique ordinaire, avait réussi à formaliser dans la langue *certaines des procédés de la métalangue*. C'est ainsi qu'il a pu démontrer le fameux théorème qui, dans les années quarante, brillait de son étrange nouveauté.

On peut imaginer Harris méditant, entre autres choses, sur une telle « polarité », et en tirant pour son programme cette idée directrice : utiliser de façon positive et jusque dans le détail technique le fait qu'en linguistique on ne puisse concevoir une métalangue située hors des langues.

Mais c'est sans doute à l'algèbre que Harris a le plus réfléchi.

Né en 1909, Harris est l'exact contemporain de plusieurs grands algébristes, ses pairs, comme G. Birkhoff et S. Mac Lane aux États-Unis ou A. I. Mal'tsev en Union Soviétique : c'est dans cette mouvance qu'il a trouvé « son » algèbre.

On sait que l'algèbre peut se définir comme la science de la *manipulation des symboles*. Dans l'algèbre *classique*, les symboles représentent des nombres, réels, ou complexes, tandis que dans l'algèbre que l'on appelait naguère *moderne*, ils représentent divers êtres non numériques définis axiomatiquement.

Moderne Algebra, oui, tel était le titre (allemand) de l'ouvrage paru en 1930-31 (deux tomes) où B. L. Van der Waerden synthétisait vigoureusement les acquis du passé et ouvrait la voie à de nouveaux développements. Encore faut-il reconnaître que ce *Grand Livre Initiatique* traitait essentiellement de structures « nobles » : anneaux commutatifs infinis et leurs idéaux, corps, etc. Les années quarante ont vu apparaître des structures plus « roturières » : treillis par exemple. Le Bourbaki de l'époque refusait de les recevoir chez lui mais plusieurs manuels, dont le plus fameux reste *A survey of Modern Algebra* des mêmes Birkhoff et Mac Lane (1941) les ont fait entrer dans l'enseignement supérieur,

1. La Théorie des types de B. Russel a suscité les gloses d'innombrables commentateurs, dont Gödel lui-même, qui lui reproche le manque d'un énoncé rigoureux de la syntaxe du formalisme. L'une des études les plus récentes est la thèse de doctorat ès-lettres de Philippe de Rouilhan : *Catégories logiques et paradoxes*, Université Paris I, 1987. Ph. de Rouilhan a eu le mérite, le courage et la patience d'investir ses compétences dans une entreprise difficile : il a entièrement réécrit la théorie des types dans un langage rigoureux, réformant la lettre tout en respectant scrupuleusement l'esprit du texte. Le Maître sort de l'épreuve lavé de mainte accusation, comme celle d'avoir horriblement mélangé type et ordre.

leur conférant du même coup droit de cité. Et puis le mouvement s'est amplifié. C'est ainsi qu'est née dans les années cinquante la notion de *système algébrique*² qui devait s'enrichir progressivement dans les années soixante. Elle a permis à Harris d'exprimer certaines de ses vues sur le langage dans un cadre familier aux mathématiciens sinon aux linguistes.

Qu'est-ce qu'un système algébrique ? Peut-être convient-il d'en donner la définition la plus élaborée (due à Birkhoff) et ce, bien que Harris n'ait pas (pas encore ?) *explicitement* fait usage de cette définition.

On se donne une famille d'ensembles disjoints, les *phylums* du système, et un ensemble d'opérations zéroaires, unaires, binaires, ternaires... (éventuellement partielles). Les opérations zéroaires distinguent certains éléments remarquables. Les autres envoient dans tel phylum tel produit cartésien de phylums. On se donne enfin un certain nombre de relations binaires, ternaires, etc. Un système algébrique est dit *homogène* s'il ne contient qu'un seul phylum, *hétérogène* dans le cas contraire. Enfin on préfère parler de *système relationnel* lorsque seules interviennent des relations.

Pour fixer les idées, regardons dans cette optique l'objet familier à tous que constitue un graphe orienté G . On peut considérer classiquement G comme un système relationnel homogène à relation(s) binaire(s) dont l'unique phylum S contient les points. Mais on peut aussi le définir comme un système algébrique hétérogène admettant un phylum S de sommets, un phylum F de flèches et deux opérations unaires, $\alpha : F \rightarrow S$, $\omega : F \rightarrow S$, lesquelles munissent chaque flèche f d'une origine $\alpha(f)$ et d'une extrémité $\omega(f)$. Ce n'est pas tout, on peut encore (entre autres !) considérer G comme un système hétérogène à trois phylums, à savoir F et S comme ci-dessus et $T = \{-1, 0, 1\}$ avec la fonction $\varphi : F \times S \rightarrow T$ telle que, $\varphi(f, s) = -1$ si s est l'origine de f , -1 s'il en est l'extrémité et 0 sinon. Cette définition s'adapte particulièrement bien à la topologie algébrique.

Tout rudimentaire qu'il est, cet exemple aura suggéré l'idée qu'il y a en général plusieurs façons fort différentes de « voir » le même objet en tant que système algébrique (le *même* objet... du moins si l'on pense qu'un objet mathématique existe en soi, indépendamment des procédés mis en œuvre pour l'appréhender).

On conçoit aussi que la notion de type puisse être introduite pour préciser les règles de calcul dans un système algébrique hétérogène : certains phylums primitifs recevront des types simples. En fait, les types existent « virtuellement » et peuvent ou non donner lieu à explicitation.

Comme on le voit, le cadre conceptuel des systèmes algébriques n'a rien d'un lit de Procuste : s'agissant d'une langue donnée, le linguiste reste le maître

2. C'est probablement Mal'tsev qui a forgé la locution de *système algébrique*. Elle est attestée dès 1953 dans un article de cet auteur : « Ob odnom Klasse algebraïckikh sistem », (Y'spchi matem.nayk). Beaucoup d'auteurs écrivent, pour désigner un tel objet, « algèbre » (homogène ou hétérogène) — sous-entendu : « Au sens de l'Algèbre Universelle ». Pour le concept, voir par exemple G. Birkhoff, « The Role of Algebra in Computing », *Computers in Algebra and Number Theory*, S.I.A.M.-A.M.S. Proceedings, Vol. IV, Providence, Rhode Island, 1971.

absolu du choix des phylums, des opérations, des relations. Mais cette extrême liberté dont dispose le linguiste ne va pas sans poser à l'épistémologue des problèmes ardu. Supposons en effet qu'un linguiste, étudiant une langue donnée L , propose d'abord un système S_1 , et par la suite un système S_2 . Les systèmes en question ne diffèrent-ils que par les façons de définir une seule « réalité mathématique » proposée en l'un et l'autre cas comme modèle ? Traduisent-ils au contraire un changement de modèle correspondant à un changement profond du « contenu » linguistique ?

En ce qui le concerne, le mathématicien ne peut guère que verser au débat l'observation suivante. La notion d'isomorphisme (donc aussi d'automorphisme) — à savoir une correspondance biunivoque entre les phylums de S_1 et ceux de S_2 , correspondance compatible avec les opérations et les relations — cette notion précieuse et féconde ne trouve plus à s'appliquer lorsque S_1 et S_2 ont des structures différentes, même si l'on a des raisons de penser que ces systèmes procèdent d'un « même objet mathématique ».

Convenons de dire, avec Birkhoff, que lorsque S_1 et S_2 procèdent effectivement d'un « même objet », comme dans notre exemple ci-dessus, on passe de l'un à l'autre par un *cryptomorphisme*. Va pour le mot : *è bene trovato !* Reste que l'élucidation des cryptomorphismes relève de la théorie des catégories (foncteurs *algébriques*). Certains mathématiciens en tireront la conclusion que, tant qu'à faire, il vaut mieux entreprendre d'emblée une formalisation dans le cadre catégorique.

En ce qui concerne le linguiste — mais a-t-on le droit de parler en son nom ? — sans nier le problème épistémologique, il dirait peut-être qu'un passage de S_1 à S_2 par « simple » cryptomorphisme peut refléter, le cas échéant, une démarche riche et intéressante du point de vue linguistique. Car, même si S_2 équivaut « cryptiquement » à S_1 , il peut donner de L une représentation « moins torturée » que celle qu'en proposait S_1 , plus naturelle et plus propre à favoriser le progrès de la recherche. En bref, il entre dans la tâche spécifique du linguiste de déterminer les « bons » cryptomorphismes.

*
* *

Harris a bien voulu donner, ici même, le fil directeur propre à guider ceux qui entreprendront quelque jour d'écrire avec sérieux l'histoire de son œuvre. Pensant à ces historiens futurs, on voudrait suggérer que des considérations d'ordre mathématique telles que celles qui viennent d'être exposées pourraient présenter quelque utilité. En effet, l'évolution des méthodes transformationnelles, quand on tente de la suivre dans son détail, se révèle si complexe qu'on ne doit négliger aucun instrument d'analyse.

En attendant le grand essai historique souhaité, il semble possible de présenter quelques remarques liminaires.

L'évolution, chez Harris, répond au schéma classique de la spirale : elle revient périodiquement, non certes au point de départ, mais chaque fois à l'aplomb et *au-dessus*.

D'autre part, lorsque Harris présente successivement diverses théories, il ne pense pas que les dernières périssent et excluent nécessairement les premières. Il estime plutôt que toutes ces théories se complètent en offrant des points de vue variés.

Il convient enfin de noter que, pour Harris, l'étude des nombreuses et diverses propriétés de base que possèdent les phrases, jointe à la possibilité d'utiliser telles ou telles d'entre elles comme méthode centrale d'analyse des langues, permet d'envisager une théorie du langage sans faire appel à une grammaire de formes logiques (voir à ce sujet la fin de la section 1 de « Transformational Theory »).

Est-il abusif de dire que cette « articulation » se situe dans la théorie linguistique au niveau « homologue » à celui qu'occupe en théorie algébrique l'articulation des cryptomorphismes ?

Au reste, que recouvre la notion de transformation ? Rien n'a plus évolué au fil du temps que la répartition du stock des « opérations linguistiques » entre *transformations* d'une part et *opérations* d'autre part, ces dernières tendant de plus en plus à être appréhendées comme l'action de quelque OPÉRATEUR.

Dans cette évolution, deux grandes périodes séparées par un « entracte ». La première période qui privilégie un ensemble de transformations culmine avec le système proposé dans les *Mathematical Structures of Language*. L'« entracte », c'est *Report and Paraphrase*, la moins « mathématique » (en apparence du moins) des œuvres de Harris. La seconde période — qui dure toujours — s'ouvre avec les *Notes du Cours de Syntaxe* ; elle resserre les couples (opérateur, opération) et aboutit à la spécialisation des transformations en réductions, proposée dans *A Grammar of English on Mathematical Principles*.

Mais pourquoi cette évolution ? Qu'est-ce qui a empêché Harris de se sentir satisfait après les *Mathematical Structures* ? Pourquoi a-t-il reposé les problèmes ?

À cela, de multiples raisons sans doute — dont celles, entre autres, que voit à sa façon le mathématicien.

Le système abstrait — ce sont les termes de l'auteur — que proposent les *Mathematical Structures* n'est pas défini canoniquement comme un système algébrique mais seulement comme un 6-uple ordonné comprenant un ensemble de base N et cinq sortes de symboles de fonctions. La normalisation de cet objet en un système algébrique hétérogène n'offrirait pas, semble-t-il, de difficultés de principe mais demanderait de grands soins dans l'exécution. La tâche majeure serait évidemment la détermination correcte de phylums adéquats. Mais même ainsi amendé, le système souffrirait encore d'un défaut dû au caractère PARTIEL des fonctions (en fait : semi-fonctions). Les raisons linguistiques qui expliquent ce caractère partiel ne trouvent pas de contrepartie à peu près satisfaisante, sinon élégante, en mathématique pure.

Que faire pour qu'une semi-fonction trouve ses arguments d'une façon naturelle, mathématiquement parlant ?

C'est à ce propos qu'il peut se révéler utile d'avoir lu — ce qu'avait fait Harris — la théorie des types de B. Russel. À partir des *Notes du Cours de*

Syntaxe commencent en effet à apparaître des opérateurs typés. La mathématisation s'oriente vers un calcul applicatif contrôlé par des types permettant de définir la structure d'une phrase comme une structure d'ordre partiel clairement défini (voir par exemple l'*English Grammar on Mathematical Principles*).

La voie est désormais ouverte à de nouveaux développements.

Dans le prolongement de ce qui vient d'être dit, il s'avère d'ores et déjà loisible d'enrichir et de préciser la combinatoire des types et de faire bénéficier le calcul applicatif de la riche expérience récemment acquise dans le domaine des lambda-calculs. Il est également concevable de reconsidérer le système hétérogène envisagé plus haut en y portant une technique de types. Peut-être arriverait-on à un objet cryptiquement lié à un certain lambda-calcul typé. Dans ce cas, et pour tout autre formalisme envisageable, c'est évidemment du point de vue de la pertinence et de la transparence linguistique qu'il convient de juger en dernier ressort.

Pour terminer, peut-être convient-il de prévenir un possible malentendu. Des raisons d'ordre historique ont invité à rapprocher deux « problèmes de fondement » mais il serait faux de poursuivre trop avant le parallèle.

Aux yeux des mathématiciens d'aujourd'hui, l'espoir de *fonder* les mathématiques apparaît comme une chimère : les mathématiques ne sauraient être fondées. Est-ce à dire que les efforts immenses dispensés en vue de résoudre un problème maintenant tenu pour impossible l'aient été en pure perte ? Certes non ! Grâce à eux, on comprend mieux ce que sont, ce que peuvent être l'activité du mathématicien, sa liberté et sa responsabilité, l'obligation qu'il a de se remettre en cause périodiquement.

Que sont vraiment les nombres entiers ? Qu'est-ce aujourd'hui que le continu ?... L'idée prévaut désormais que le mathématicien doit travailler sur *contrat temporaire*, face à l'*horizon du moment*.

En linguistique, la situation est nécessairement autre puisque — constatation banale — les faits dont traite cette science sont dans l'espace-temps, appartiennent au « monde réel ». Constatation banale dont les différentes Écoles tirent des conclusions différentes, même celles qui s'accordent à placer une certaine confiance en l'outil mathématique.

Harris, pour sa part, rejette toute démarche qui plongerait les faits linguistiques dans des formalismes déjà prêts, auxquels il suffirait d'apporter quelques ajustements. Il croit en revanche à la validité de structures mathématiques progressivement dégagées à partir des observables : telle est sa manière de « fonder ».

En bref, Harris ne demande pas aux mathématiques du prêt-à-porter, mais comme il est dit dans le beau titre rappelé plus haut, des *principes*.